Dérivées

Tableau des dérivées, opérations, composées, tangente, variations et convexité

Nombre dérivé et tangente

1re Tle

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$: c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

Tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Approximation affine (1re) : pour h proche de 0, $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\,h$.

Dérivées des fonctions usuelles

1re Tle

Fonction	Dérivée	Sur	Classe
k (constante)	0	$\mathbb{R}$	1re
x	1	$\mathbb{R}$	1re
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	1re
x^n (n entier, $n \geqslant 1$)	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	1re
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	1re
$\dfrac{1}{x^n}$ (n entier, $n \geqslant 1$)	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	1re
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	1re
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	1re
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$	Tle
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	Tle
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	Tle

Opérations

1re Tle

u et v dérivables, k un réel :

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$k\,u$	$k\,u'$
$u\,v$	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{v}$ $(v\neq 0)$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$ $(v\neq 0)$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$g(ax+b)$	$a\,g'(ax+b)$

Attention : $(uv)'\neq u'v'$. Dans un quotient, l'ordre compte : $u'v-uv'$.

Fonctions composées

Tle

$(g\circ u)'(x)=u'(x)\times g'\big(u(x)\big)$, d'où :

Fonction	Dérivée	Condition
e^u	$u'\,e^u$	
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$	$u>0$
u^n	$n\,u'\,u^{n-1}$	n entier non nul
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u>0$
$\cos u$	$-u'\sin u$	
$\sin u$	$u'\cos u$	

Exemple : $\left(e^{x^2}\right)'=2x\,e^{x^2}$.

Variations et extremums

1re Tle

- $f'>0$ sur un intervalle : f y est strictement croissante ; $f'<0$: strictement décroissante.
- Extremum local en a : f' s'annule **en changeant de signe**.

Méthode : calculer $f'(x)$, le **factoriser**, étudier son signe (tableau de signes), en déduire le tableau de variations.

Attention : $f'(a)=0$ ne suffit pas : $x\mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, sans extremum.

Convexité

Tle

- $f''\geqslant 0$ sur I : f est **convexe** (courbe au-dessus de ses tangentes, f' croissante).
- $f''\leqslant 0$ sur I : f est **concave** (courbe au-dessous de ses tangentes).
- Point d'inflexion : f'' s'annule en changeant de signe ; la courbe traverse sa tangente.

Continuité et valeurs intermédiaires

Tle

Une fonction dérivable est continue (la réciproque est fausse : $x\mapsto|x|$ en 0).

Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ a **une unique** solution dans $[a;b]$.