Exponentielle et logarithme

Règles de calcul, équations, dérivées, limites et croissances comparées

La fonction exponentielle

1re Tle

C'est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. On note $\exp(x) = e^x$, avec $e \approx 2{,}718$.

- Pour tout réel x : $e^x > 0$.
- Strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $(e^{ax+b})' = a\,e^{ax+b}$ (1re) ; $(e^u)' = u'\,e^u$ (Tle).

Règles de calcul avec l'exponentielle

1re Tle

Règle	Exemple
$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^{x+2} = e^2\,e^x$
$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$	$e^{-3} = \dfrac{1}{e^3}$
$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$	$\dfrac{e^5}{e^2} = e^3$
$(e^a)^n = e^{na}$	$(e^x)^2 = e^{2x}$

Équations et inéquations : $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$.

> **Attention :** $e^{a+b} \neq e^a + e^b$; $(e^x)^2 = e^{2x}$, pas e^{x^2} ; $e^x = 0$ n'a pas de solution.

Le logarithme népérien

Tle

ln est définie sur $]0;+\infty[$: pour $x > 0$, $\ln x$ est l'unique réel y tel que $e^y = x$.

- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$; $\ln(e^x) = x$ pour tout x, et $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$.
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$: strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
- $\ln x < 0$ sur $]0;1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1;+\infty[$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ pour $u > 0$.

Règles de calcul avec le logarithme

Tle

Pour $a > 0$, $b > 0$ et n entier relatif :

Règle	Exemple
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	$\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$
$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	$\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$
$\ln(a^n) = n \ln a$	$\ln 8 = 3 \ln 2$
$\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$	

Équations : $\ln a = \ln b \iff a = b$ (avec $a, b > 0$) ; $e^x = k \iff x = \ln k$ (pour $k > 0$).

Exemple : $2^n > 1\,000 \iff n \ln 2 > \ln 1\,000 \iff n > \dfrac{\ln 1\,000}{\ln 2} \approx 9{,}97$, donc $n \geqslant 10$.

> **Attention :** $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$. Pour $\ln\big(f(x)\big)$, il faut $f(x) > 0$.

Limites et croissances comparées

Tle

	en $-\infty$	en 0	en $+\infty$
e^x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		$-\infty$ (à droite)	$+\infty$

Croissances comparées, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x$$

« L'exponentielle l'emporte sur les puissances, les puissances l'emportent sur le logarithme. »

Limites utiles : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.