Matrices et graphes

Calcul matriciel, inverse, suites de matrices, graphes et chaînes de Markov

Matrices et opérations

Tle exp.

Une matrice de dimension $n \times p$ a n lignes et p colonnes ; a_{ij} est le coefficient de la ligne i et de la colonne j.

- Somme (même dimension) et produit par un réel : coefficient par coefficient.
- Produit AB (autant de colonnes dans A que de lignes dans B) : le coefficient (i, j) est le produit de la ligne i de A par la colonne j de B.
- Matrice identité I_n : $AI_n = I_nA = A$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$.

Attention : En général, $AB \neq BA$.

Inverse et systèmes

Tle exp.

Une matrice carrée A est inversible s'il existe B telle que $AB = BA = I_n$; on note $B = A^{-1}$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: A est inversible $\iff \det A = ad - bc \neq 0$, et alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Système : $AX = B \iff X = A^{-1}B$ (avec A inversible).

Exemple : $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$; $\det A = 2 \times 3 - 1 \times 5 = 1$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, donc $x = 1$ et $y = 2$.

Puissances et suites de matrices

Tle exp.

- Matrice diagonale D : D^n s'obtient en élevant chaque coefficient diagonal à la puissance n.
- Si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors $A^n = PD^nP^{-1}$.
- $U_{n+1} = AU_n$ donne $U_n = A^nU_0$.
- $U_{n+1} = AU_n + B$: un état stable C vérifie $C = AC + B$; alors $V_n = U_n - C$ vérifie $V_{n+1} = AV_n$, d'où $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.

Graphes

Tle exp.

Un graphe est formé de **sommets** reliés par des **arêtes** (des **arcs** s'il est orienté). Son ordre est son nombre de sommets ; le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui en partent.

- Somme des degrés $= 2\times$ nombre d'arêtes.
- Chaîne : suite d'arêtes consécutives ; sa longueur est son nombre d'arêtes. Cycle : chaîne fermée dont les arêtes sont distinctes.
- Connexe : deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne. Complet : deux sommets quelconques sont adjacents ; à n sommets, il a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

Exemple : le graphe complet à 5 sommets a $\dfrac{5 \times 4}{2} = 10$ arêtes ; chaque sommet est de degré 4, et $5 \times 4 = 2 \times 10$.

Matrice d'adjacence

Tle exp.

Sommets numérotés de 1 à n : m_{ij} est le nombre d'arêtes (ou d'arcs) de i vers j. La matrice est symétrique si le graphe n'est pas orienté.

Le coefficient (i, j) de M^k est le **nombre de chemins de longueur k** de i à j.

Exemple : la chaîne $1 - 2 - 3$ a pour matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: 2 chemins de longueur 2 vont de 2 à 2 ($2 - 1 - 2$ et $2 - 3 - 2$).

Chaînes de Markov

Tle exp.

- Matrice de transition P : p_{ij} est la probabilité de passer de l'état i à l'état j ; la somme de chaque ligne vaut 1.
- Distribution (matrice **ligne**) : $\pi_{n+1} = \pi_n P$, donc $\pi_n = \pi_0 P^n$.
- Distribution invariante : $\pi P = \pi$, la somme de ses coefficients valant 1.
- Deux états, $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ avec $0 < a + b < 2$: quelle que soit π_0, π_n tend vers $\pi = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \end{pmatrix}$.

Exemple : $a = 0{,}2$ et $b = 0{,}3$ donnent $\pi = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

> **Attention :** La distribution se multiplie **à gauche** de P : $\pi_n P$, pas $P\pi_n$.