Nombres complexes

Forme algébrique, module et argument, forme exponentielle, trigonométrie, équations et géométrie

Forme algébrique

Tle exp. 1re STI2D Tle STI2D

$i^2 = -1$. Tout nombre complexe s'écrit de façon unique $z = a + ib$, avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$ réels.

- Égalité : $a + ib = a' + ib' \iff a = a'$ et $b = b'$.
- Calculs : comme avec les réels, en remplaçant i^2 par -1.
- Conjugué : $\overline{z} = a - ib$ et $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$.
- Quotient : on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemples : $(2+3i)(1-i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 5 + i$ et $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{2}$.

Conjugué, puissances de i et binôme

Tle exp.

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.
- z réel $\iff \overline{z} = z$; z imaginaire pur $\iff \overline{z} = -z$.
- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
- $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$: i^n dépend du reste de n dans la division par 4. Exemple : $i^{2\,026} = i^{4\times 506+2} = i^2 = -1$.
- Binôme de Newton : $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Module et argument

Tle exp. 1re STI2D Tle STI2D

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, $z = a + ib$ est l'affixe du point $M(a; b)$.

- Affixe de $\overrightarrow{AB}$: $z_B - z_A$; milieu de $[AB]$: $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.
- Module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$; $AB = |z_B - z_A|$.
- Argument ($z \neq 0$) : une mesure θ de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, à 2π près, avec $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$.
- Forme trigonométrique : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $r = |z|$.

Exemple : pour $z = 1 + i\sqrt{3}$, $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ et $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Forme exponentielle

Tle exp. Tle STI2D

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$; tout complexe non nul s'écrit $z = re^{i\theta}$, avec $r = |z|$ et θ un argument de z.

Valeurs : $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Opération	Forme exponentielle	Module	Argument
produit	$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\,\lvert z'\rvert$	$\theta + \theta'$
quotient	$\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$	$\dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\theta - \theta'$
puissance	$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$	$\lvert z\rvert^n$	$n\theta$
conjugué	$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$	$\lvert z\rvert$	$-\theta$

Exemple : $1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{2i\pi} = 16$.

Trigonométrie : Euler, addition, linéarisation

Tle exp. Tle STI2D

- Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.
- Addition : $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$.
- Soustraction : $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$.
- Duplication : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ et $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.
- Linéarisation : $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.
- Moivre (Tle exp.) : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Exemple : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Équations polynomiales

Tle exp.

- $z^2 = a$ avec $a < 0$ réel : $z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$.
- $az^2 + bz + c = 0$ (a, b, c réels, $a \neq 0$) avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: deux solutions conjuguées $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Dans tous les cas, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
- Si $P(a) = 0$, alors $P(z) = (z - a)\,Q(z)$, avec Q de degré $n - 1$; $z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + \cdots + a^{n-1})$.
- Un polynôme de degré n a au plus n racines ; s'il est à coefficients réels et si z_0 est racine, $\overline{z_0}$ l'est aussi.

Exemple : $z^2 - 2z + 5 = 0$; $\Delta = 4 - 20 = -16$, donc $z = \dfrac{2 \pm 4i}{2}$: $z = 1 + 2i$ ou $z = 1 - 2i$.

Nombres complexes et géométrie

Tle exp.

Points A, B, C d'affixes a, b, c, avec $B \neq A$ et $C \neq A$:

- $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{AC}{AB}$ et $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ à 2π près.
- A, B, C alignés $\iff \dfrac{c-a}{b-a}$ réel ; $(AB) \perp (AC) \iff \dfrac{c-a}{b-a}$ imaginaire pur.
- Rotation de centre A et d'angle θ : $z' - a = e^{i\theta}(z - a)$.
- Cercle de centre A et de rayon r : $|z - a| = r$; médiatrice de $[AB]$: $|z - a| = |z - b|$.
- $\mathbb{U}$, ensemble des complexes de module 1 (cercle trigonométrique), est stable par produit et par inverse.
- Racines n-ièmes de l'unité (solutions de $z^n = 1$) : $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n - 1$; elles forment un polygone régulier et, pour $n \geqslant 2$, leur somme est nulle.

Transformations du plan

Tle STI2D

Le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par :

Transformation	Écriture complexe
translation de vecteur d'affixe b	$z' = z + b$
rotation de centre O et d'angle θ	$z' = e^{i\theta}z$
homothétie de centre O et de rapport k réel	$z' = kz$

Exemple : le quart de tour direct de centre O est $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z = iz$.