Primitives et intégrales

Tableau des primitives, intégrale, intégration par parties et équations différentielles

Primitive d'une fonction

Tle

F est une primitive de f sur I si $F' = f$ sur I. Toute fonction continue sur I a des primitives, et elles diffèrent d'une constante : $F + C$.

Pour vérifier une primitive, on la **dérive**.

Primitives des fonctions usuelles

Tle

Fonction	Une primitive	Sur
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
x^n (n entier, $n \geqslant 1$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n}$ (n entier, $n \geqslant 2$)	$-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
e^{ax+b} ($a \neq 0$)	$\dfrac{1}{a}\,e^{ax+b}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

Primitives et composées

Tle

u dérivable sur I :

Fonction	Une primitive	Condition
$u'\,e^u$	e^u	
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u > 0$
$u'\,u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	n entier, $n \neq -1$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u \neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$

Exemple : une primitive de $x\,e^{x^2}$ est $\dfrac{1}{2}e^{x^2}$.

Intégrale

Tle

Pour f continue sur $[a;b]$ et F une primitive de f :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Si $f \geqslant 0$, c'est l'aire (en unités d'aire) entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

Exemple : $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$.

Propriétés de l'intégrale

Tle

- Linéarité : $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b kf = k\int_a^b f$.
- Chasles : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.
- Positivité : si $f \geqslant 0$ sur $[a;b]$ (avec $a \leqslant b$), alors $\int_a^b f \geqslant 0$.
- Aire entre deux courbes, si $f \geqslant g$ sur $[a;b]$: $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$.
- Valeur moyenne de f sur $[a;b]$: $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Intégration par parties

Tle

u et v dérivables, à dérivées continues sur $[a;b]$:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)\,v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple : avec $u = x$ et $v' = e^x$, $\int_0^1 x\,e^x\,\mathrm{d}x = \big[x\,e^x\big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - (e-1) = 1$.

Équations différentielles

Tle

Équation	Solutions (C réel)
$y' = ay$	$y = C\,e^{ax}$
$y' = ay + b$ ($a \neq 0$)	$y = C\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$
$y' = ay + f$	$y = C\,e^{ax} + u$, où u est une solution particulière

Une condition initiale $y(x_0) = y_0$ donne une seule valeur de C.

> **Attention :** La constante multiplie : $C\,e^{ax}$, pas $e^{ax} + C$. La solution constante est $-\dfrac{b}{a}$, pas $\dfrac{b}{a}$.