Probabilités et statistiques

Indicateurs, probabilités conditionnelles, variables aléatoires, dénombrement et loi binomiale

Statistiques — 2de

- Moyenne : $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N}$ (N : effectif total).
- Médiane : partage la série rangée en deux groupes de même effectif.
- Quartiles : Q_1 (resp. Q_3) est la plus petite valeur telle qu'au moins $25\,\%$ (resp. $75\,\%$) des valeurs lui sont inférieures ou égales. Écart interquartile : $Q_3 - Q_1$.
- Écart type : $\sigma = \sqrt{\dfrac{n_1(x_1-\bar{x})^2 + \cdots + n_p(x_p-\bar{x})^2}{N}}$.

Série $2, 4, 6, 8$: moyenne 5 et écart type $\sqrt{5} \approx 2{,}24$.

Évolutions — 2de

- Taux d'évolution : $t = \dfrac{V_{\text{arrivée}} - V_{\text{départ}}}{V_{\text{départ}}}$; coefficient multiplicateur : $1 + t$.
- Évolutions successives : on multiplie les coefficients. Évolution réciproque : coefficient $\dfrac{1}{1+t}$.
- Une hausse de $25\,\%$ est annulée par une baisse de $20\,\%$: $1{,}25 \times 0{,}8 = 1$.

Probabilités — 2de 1re Tle

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Issues équiprobables : $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre d'issues}}$.

Probabilités conditionnelles — 2de 1re Tle

- $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (avec $P(A) \neq 0$), donc $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- Arbre pondéré : on **multiplie** le long d'un chemin, on **additionne** les chemins ; les branches issues d'un même nœud ont une somme égale à 1.
- Probabilités totales (1re) : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$.
- Indépendance (1re) : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, soit $P_A(B) = P(B)$.

Exemple : $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}5$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$ donnent $P(B) = 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}29$.

> **Attention :** $P_A(B) \neq P_B(A)$ en général. Indépendants ne veut pas dire incompatibles.

Variables aléatoires — 1re Tle

Loi de X : les valeurs x_i et leurs probabilités p_i, avec $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

Indicateur	Formule
espérance	$E(X) = p_1x_1 + \cdots + p_nx_n$
variance	$V(X) = \sum p_i\left(x_i - E(X)\right)^2 = E(X^2) - E(X)^2$
écart type	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
transformation affine	$E(aX+b) = aE(X) + b$ et $V(aX+b) = a^2\,V(X)$

Jeu équitable : espérance du gain nulle.

Dénombrement — Tle

- k-uplets d'un ensemble à n éléments : n^k. Arrangements (sans répétition) : $\dfrac{n!}{(n-k)!}$. Permutations : $n!$.
- Combinaisons (parties à k éléments) : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Exemple : $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$.

Loi binomiale — Tle

X compte les succès dans n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, de paramètre p :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p)$$

- « Au moins un succès » : $P(X \geqslant 1) = 1 - (1-p)^n$.
- $P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1)$.

Exemple : $n = 10$, $p = 0{,}5$: $P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0{,}5^{10} \approx 0{,}246$.

Sommes de variables et grands nombres — Tle

Pour X_1, …, X_n indépendantes, de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \dfrac{S_n}{n}$:

- $E(S_n) = n\mu$, $V(S_n) = n\sigma^2$; $E(M_n) = \mu$, $V(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.
- Bienaymé-Tchebychev : $P\left(|X - E(X)| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.
- Concentration : $P\left(|M_n - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\,\delta^2}$; loi des grands nombres : cette probabilité tend vers 0.