Suites numériques

Suites arithmétiques et géométriques, sommes, variations, limites et récurrence

Suites arithmétiques

1re Tle

On passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre r, la raison : $u_{n+1} = u_n + r$.

- Terme général : $u_n = u_0 + nr$, ou $u_n = u_p + (n-p)r$.
- Croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$.
- Points $(n ; u_n)$ alignés : croissance **linéaire**.

Exemple : $u_0 = 5$ et $r = 3$ donnent $u_{10} = 5 + 10 \times 3 = 35$.

Suites géométriques

1re Tle

On passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre q, la raison : $u_{n+1} = q\,u_n$.

- Terme général : $u_n = u_0 \times q^n$, ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- Avec $u_0 > 0$: croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$.
- Une hausse de $t\,\%$ par an donne une suite géométrique de raison $1 + \dfrac{t}{100}$.

Exemple : $1\,000$ € placés à $2\,\%$ par an : $u_n = 1\,000 \times 1{,}02^n$, et $u_{10} \approx 1\,218{,}99$ €.

Sommes de termes

1re Tle

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Somme de termes consécutifs :

- arithmétique : $S = \text{nombre de termes} \times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$;
- géométrique : $S = \text{premier} \times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

Exemple : $1 + 2 + \cdots + 100 = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5\,050$.

Attention : De u_0 à u_n, il y a $n + 1$ termes.

Sens de variation

1re Tle

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$: positif, la suite est croissante ; négatif, décroissante.
- Si $u_n = f(n)$ avec f monotone sur $[0 ; +\infty[$, la suite a le même sens de variation que f.
- Termes strictement positifs : comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Limites

Tle

Raison q	Limite de q^n
$q > 1$	$+\infty$
$q = 1$	1
$-1 < q < 1$	0
$q \leqslant -1$	pas de limite

- Opérations sur les limites, comme pour les fonctions ; formes indéterminées : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$.
- Gendarmes : si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si v_n et w_n tendent vers ℓ, alors u_n tend vers ℓ.
- Comparaison : si $u_n \geqslant v_n$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$.
- Toute suite croissante majorée converge ; toute suite décroissante minorée converge.

Récurrence et suites arithmético-géométriques

Tle

Raisonnement par récurrence : **initialisation** (la propriété est vraie au premier rang), **hérédité** (si elle est vraie au rang n, elle l'est au rang $n+1$), **conclusion**.

Suite $u_{n+1} = a\,u_n + b$ $(a \neq 1)$: le point fixe est $\ell = \dfrac{b}{1-a}$, la suite $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a, donc $u_n = \ell + (u_0 - \ell)\,a^n$.

Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et si (u_n) converge vers ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.